جامعة دمشق

كلية العلوم

قسم الرياضيات

دراسة حول جبور لي وتمثيلاتها

رسالة نالت درجة الماجستير في الرياضيات بمرتبة شرف

إعداد

ريتا عدنان سعيد

إشراف

د.إيلي قدسي

أستاذ مساعد في قسم الرياضيات

كلية العلوم

٢٠٠٧- ٢٠٠٨

بسم الله الرحمن الرحيم

((يرفع الله الذين آمنوا منكم والذين أوتوا العلم درجات))

إلى ينبوع العطاء الذي لا ينضب .... أمي

إلى النبراس الذي يضيء ظلمة أيامي ويسدد خطاي .... أبي

إلى من رابطة الله بدمهم وروحهم .... رشا ، علاء

إلى من قدم ودعم وساند .... أنس ، وسام

لكم مني كل الحب والشكر والعرفان بالجميل

ريتا

بطاقة شكر

إلى أستاذي الفاضل الذي دعمني معنوياً وفكرياً والذي نهلت من علمه الكثير ومن خبرته الأكثر:

د. إيلي قدسي

إلى الكوكبة الرائدة في عالم العلم والمعرفة، بسمة الوطن وأمله في صناعة غده المشرق الجميل، إلى العيون الفرحة بنماء الزرع، والقلوب التي أسعدها يوم الحصاد:

أعضاء الهيئة التدريسية في قسم الرياضيات

إلى الأساتذة أعضاء لجنة التحكيم والمناقشة الذين أدوا دوراً هاماً في نجاح هذا العمل:

د. محمد خير أحمد   **د. عبد اللطيف هنانو**

لكم مني كل الاحترام والشكر والتقدير

ريتا

الفهرس

دليل المصطلحات العلمية

نورد فيما يلي قائمة بالمصطلحات العلمية الواردة في هذه الرسالة مرتّبة وفق حروف الهجاء العربية مع مقابل كل منها باللغة الإنكليزية:

– أ –

أثر	Trace
استقراء	Induction
اشتقاق	Derivation
اشتقاق داخلي	Inner derivation

– ب –

بسيط	Simple
بعد	Dimension

– ت –

تبادلي	Abelian
تبديلي	Commutative
تجميعي	Associative
تحليل جوردان	Jordan decomposition
تحليل كارتان	Cartan decomposition
تشاكل	Homomorphism
تصنيف	Classification
تطبيق خطي	Linear map
تقابل	Bijective
تماثل	Isomorphism
تمثيل	Representation

– ث –

ثنائي الخطية	Bilinear

- ج -

Unitary associative algebra	جبر تجميعي واحدي
General linear algebra	جبر خطي عام
Cartan subalgebra	جبر كارتان
Lie algebra	جبر لي
Lie subalgebra	جبر لي الجزئي
Quotient Lie algebra	جبر لي الخارج
Classical Lie algebra	جبر لي كلاسيكي
Universal enveloping algebra	جبر مغلف شامل
Tensor product	جداء تنسوري
Inner product	جداء داخلي
Root	جذر

- ح -

Minimal polynomial	حدودية أصغرية

- خ -

Irreducible	خزول
Completely irreducible	خزول تماماً
Algorithm	خوارزمية

- د -

Index	دليل

- ش -

Vector	شعاع
Eigenvector	شعاع ذاتي
Highest weight vector	شعاع الوزن الأعلى
Form	شكل

- ص -

Invariante	صامد
Killing form	صيغة Killing

- ط -

Length	طول

- ع -

Complex	عقدي
Total ordering relation	علاقة ترتيب كلية
Distinguished element	عنصر مميز
Generic element	عنصر شامل

- غ -

Surjective	غامر
Indecomposable	غير قابل للتحليل
Irreducible	غير خزول
Non degenerate	غير مترد

- ف -

Euclidean space	فضاء إقليدي
Dual space	فضاء ثنوي
Vector space	فضاء شعاعي
Generalised eigenspace	فضاء ذاتي معمم
Weight space	فضاء وزن
Generalised weight space	فضاء وزن معمم

- ق -

Solvable	قابل للحل
Basis	قاعدة
Main diagonal	قطر رئيسي
Diagonal	قطرية
Diagonalisable	قطور
Eigenvalue	قيمة ذاتية

Injective	متباين
Connected	مترابط
Central series	متسلسلة مركزية
Derived series	متسلسلة مشتقة
Jacobi identity	متطابقة جاكوبي
Symmetric	متناظر
Lower	متناقصة
Ideal	مثالي
Strict upper triangular	مثلثية عليا تماماً
Direct sum	مجموع مباشر
Fundamental system of roots	مجموعة الجذور الأساسية
Negative system of roots	مجموعة الجذور السالبة
Positive system of roots	مجموعة الجذور الموجبة
Diagram	مخطط
Subdiagram	مخطط جزئي
Dynkin diagram	مخطط دينكن
Adjoint	مرافق
Center	مركز
Linearly independent	مستقل خطياً
Matrix	مصفوفة
Unitary matrix	مصفوفة واحدية
Coefficient	معاملات
Nilpotent	معدوم القوى
Normalizer	مناظم
Finite dimensional	منتهي البعد
Module	مودول

Submodule	مودول جزئي
Verma modules	مودولات فيرما
Generated	مولد

– ن –

Semi simple	نصف بسيط
Norm	نظيم

– و –

Weight	وزن
Highest weight	وزن أعلى

المقدمة

١- لمحة تاريخية

تُنسب نظرية لي إلى النرويجي Marius Sophus Lie (١٨٤٢-١٨٩٩) الذي وضع أسس نظرية لي حيث عرَّف جبور لي البسيطة والقابلة للحل ومعدومة القوى وأثبت قابلية الاختـزال المثلثـي لجبور لي القابلة للحل .

ويعود الفضل لــ Wilhelm Killing (ألمانيا ١٨٤٧-١٩٢٣) في إدخال مفهوم Radical وهـو أكبر مثالي قابل للحل في جبر لي حيث أطلق تسمية جبر لي نصف بسيط على كل جبـر لـي G يحقق $Rad(G)=\{0\}$ ، وأثبت أن كل جبر لي بسيط يكون نصف بسيط . بالإضافة لذلك برهن أنَّ الشرط اللازم كي يكون جبـر لـي G معـدوم القـوى هـو أن تكـون جميـع التطبيقـات $ad_x \ (x\in G)$ معدومة القوى .

كما قام Elie Cartan (فرنسا ١٨٦٩-١٩٥١) بتعريف صيغة Killing، وقدَّم معيارين أساسيين لاختبار جبور لي القابلة للحل ونصف البسيطة و طرح فكرة تصنيف جبور لي نـصف البـسيطة حيث قام ولده Henri Cartan (فرنسا ١٩٠٤) بتصنيف هذه الجبور .

بيَّن Friedrich Engel (ألمانيا ١٨٦١-١٩٤١) أثناء دراسته لجبور لي أن الشرط الكافي ليكون جبـر لي معدوم القوى هو أن تكون جميع تطبيقات الاشتقاق الداخلية المعرفة عليه معدومة القـوى. بالإضـافة لذلك ، يعود له الفضل في تجميع أعمال Lie وأفكاره في سبعة مجلدات تم نشر ستة منهـا بـين عـامي (١٩٢٢-١٩٣٧) بينما تأخر نشر المجلد السابع حتى عام ١٩٦٠ .

كما تجدر الإشارة إلى العمل العظيم الذي قام به Eugene Dynkin (روسيا ، ١٩٢٤) الـذي ابتكر مخططات بيانية نسبت إليه (مخططات دينكن) والتي سهلت إلى حد كبير عملية تـصنيف جبور لي البسيطة .

لقد كانت جميع الدراسات السابقة على جبور لي معرفة على الحقلـين □, □ و أول مـن بـدأ بمحاولات دراسة جبور لي على حقول مختلفة هو Nathan Jacobson (بولندا ١٩١٠-١٩٩٩)

حيث أثبت أن معظم النتائج التي تم الحصول عليها في نظرية لي تبقى صحيحة علـــى أي حقـــل مميزه صفر.

في بداية السبعينات من القرن الماضي تحرك العلماء لدراسة جبور لي خوارزمياً ، حيث تمكـــن W.A.de Graaf من تصنيف جبور لي القابلة للحل[19] ، كما تمكن C.Schneider من تصنيف جبور لي معدومة القوى[4] .

٢ –مخطط الرسالة

نقدِّم في الفصل الأول مفهوم جبور لي منتهية البعد العقدية ونستعرض مبرهنتـــي Lie و Engel والنتائج الأساسية لهما ، كما نتطرق إلى صيغة Killing التي تعد اللبنة الأساسية فـــي معيـــاري كارتان ذوي الأهمية الكبيرة في نظرية لي ، وفي نهاية الفصل نورد مفهوم مودولات جبـــر لـــي ونبين وجود تكافؤ بين مفهومي المودولات وتمثيلات جبور لي .

في الفصل الثاني ، نقدِّم الطرق المختلفة لتحليل جبر لي وذلك بغية الوصول إلى تحليل كارتـــان لجبر لي نصف البسيط واستعراض خواصه وفقاً لتمثيلات جبر لي $SL(2,\mathbb{C})$.

نخصِّص الفصل الثالث لجبر لي G نصف البسيط حيث نقوم ببناء فضاء إقليدي يحـــوي جميـــع جذور G، ونعرِّف مخطط دينكن الموافق لمجموعة الجذور الأساسية لـــ G . والجوهري في هذا الفصل هو إثبات أنَّ G بسيط إذا وفقط إذا كان مخطط دينكن مترابطاً ، وهذا يقودنا إلى تصنيف جبور لي البسيطة .

في الفصل الرابع عرضنا مفهومي الجبر المغلف الشامل لجبر لي ومودولات فيرمـــا واســـتفدنا منهما في تصنيف المودولات غير الخزولة لجبر لي نصف البسيط .

يُعدُّ الفصل الخامس تطبيقاً عملياً على ما جاء في الفصول السابقة من أفكار نظرية ، حيث قدمنا الطريقة التي وضعها K.Eradman و M.J.Wildon عام ٢٠٠٦ لاختبار جبور لي الخطية البسيطة التي تحقق شروط تمهيدية الاختبار وقمنا بتطبيق هذه الطريقة مباشرة على العائلات الأربعة لجبور لي الكلاسيكية والتي تعد من أهم جبور لي الخطية . وبما أن هذه الطريقة تفشل في حال لم تحقق جبور لي الخطية الشروط الثلاثة لتمهيدية الاختبار فقد برزت أهمية وجود خوارزمية عامة لاختبار جبور لي البسيطة.

استعرضنا في الفصل الأخير المقالة التي تمت الموافقة على نشرها في مجلة جامعة دمشق للعلوم الأساسية بتاريخ ٢٠٠٨/٩/٢٢ والتي قدَّمنا فيها مفهوم العنصر المميز h_0 في جبر لـــي نـــصف البسيط G منته البعد (على حقل F مميزه معدوم) ، وبيَّنا أنَّ تحليل جبر لي نصف البسيط إلـــى فضاءات وزن H مطابق لتحليل G إلى الفضاءات الذاتية للمؤثر ad_{h_0} مما ســمح لنـــا بإنـــشاء خوارزمية لاختبار جبور لي البسيطة . قمنا ببرمجة الخوارزمية السابقة لاختبار جبور لي الخطية البسيطة على حقل عددي عن طريق برنامج Mathematica٥,٠ حيث تمَّ تنفيذ هــذه الخوارزميـــة على جبر لي الخطي نصف البسيط $SL(3,\mathbb{C})$.

الفصل الأول

جبور لي وتمثيلاتها

نقدم في هذا الفصل مفهوم جبور لي ونستعرض بعد ذلك مبرهنتي Lie و Engel والنتائج الأساسية لهما ، كما نتطرق إلى صيغة Killing التي تعد اللبنة الأساسية في معياري كارتان ذوي الأهمية الكبيرة في نظرية لي ، وفي نهاية الفصل نورد مفهوم مودولات جبر لي ونبين وجود تكافؤ بين مفهومي المودولات وتمثيلات جبور لي . أهم المراجع التي استخدمت في هذا الفصل [7]، [10]، [11]، [21]، [22].

إنَّ الفضاءات الشعاعية الواردة في سياق هذه الأطروحة عقدية ومنتهية البعد.

١-١- جبور لي

إنَّ جبر لي العقدي هو فضاءٌ شعاعيٌ G معرفٌ على حقل الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ مزودٌ بتطبيق ثنائي الخطية:

$$G \times G \to G \quad , \quad (x, y) \mapsto [x, y]$$

يحقق الخاصتين التاليتين:

$$[x, x] = 0 \qquad (\forall x \in G) \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \quad (\forall x, y, z \in G) \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

تُعرف الخاصة (2) بمتطابقة جاكوبي .

يتضح على الفور أنَّ :

$$0 = [x + y, x + y] = [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] = [x, y] + [y, x]$$

وبالتالي: $[x, y] = -[y, x] \quad (\forall x, y \in G)$

يُقال عن جبر لي G إنَّه تبادلي إذا اتصف بالخاصية $[G, G] = \{0\}$ ويبرهن أنَّ كل جبر لي أحادي البعد تبادلي .

وسوف نسمي جبور لي العقدية بجبور لي وذلك بغية الاختصار.

اصطلاح: ليكن I,J فضاءين شعاعين جزئيين من جبر لـي G يُرمـز بـ $[I,J]$ للفضاء الشعاعي الجزئي من G المولد بكل العناصر من الشكل $[x,y]$ حيث $y\in J, x\in I$.

وينتج مباشرةً أنَّ $[I,J]=[J,I]$. وفي الحالة الخاصة عندما $I=J=G$ نحصل على الجبر المشتق لـ G والذي يُرمز له بـ D^1G.

تعريف: ليكن G,G' جبري لي، يُسمَّى التطبيق $A:G\to G'$ تشاكل لي إذا تحقق أنَّ:

$$\left.\begin{array}{l} 1) A(x+y)=A(x)+A(y) \\ 2) A(\lambda x)=\lambda A(x) \\ 3) A[x,y]=[A(x),A(y)] \end{array}\right\} \quad ; \quad \forall x,y\in G, \forall\lambda\in \mathbb{R}$$

وتجدر الإشارة إلى أنَّ كل جبر تجميعي واحدي K هو جبر لي وذلك بتزويده بالعملية الثنائية الخطية التالية $[x,y]=x\cdot y-y\cdot x$ حيث $\cdot$ هو قانون التشكيل التجميعي المعرف على L سنرمز لهذا الجبر بـ GK .

جبور لي الخطية $GL(n,\mathbb{R}), GL(V)$

ليكن V فضاءً شعاعياً على الحقل $\mathbb{R}$، ولتكن $L(V)$ مجموعة المؤثرات الخطية على V . في الحقيقة، أنَّ $L(V)$ تشكل جبراً تجميعياً واحدياً على $\mathbb{R}$، ويمكن جعله جبر لي وذلك بتعريف العملية الثنائية الخطية التالية:

$$[A,B]=A\circ B-B\circ A \qquad (\forall A,B\in L(V))$$

يُسمَّى جبر لي الموافق $GL(V)$ «الجبر الخطي العام». كما يسمى كل جبر جزئي منه جبر لي الخطي.

كما تشكل $M_n(\mathbb{R})$ مجموعة المصفوفات المربعة من المرتبة n فضاءً شعاعياً بالنسبة لعملية جمع المصفوفات والمضاعف السلمي لمصفوفة ، وإذا زودنا هذا الفضاء بالعملية الثنائية الخطية التالية:

$$[\quad]: M_n(\mathbb{R})\times M_n(\mathbb{R})\to M_n(\mathbb{R})$$
$$[M_1,M_2]=M_1M_2-M_2M_1$$

نحصل على جبر لي نرمز له بـ $GL(n,\mathbb{R})$ ونظراً لكون $M_n(\mathbb{R})\approx L(V)$ فإنَّنا نسمَّي $GL(n,\mathbb{R})$ جبر لي الخطي.

أهمية البحث والنتائج

يُعدُّ هذا البحث ركيزة أساسية لجميع الدراسات المتعلقة بجبور لي منتهية البعد، ونظــراً للمكانــة الهامة التي تحتلها جبور لي البسيطة في نظرية لي فقد كان لها الحيز الأكبر من دراستنا ، ومــن أبرز ما قمنا به في هذا العمل:

١) دراسة تحليل وتصنيف جبور لي البسيطة بأسلوب حديث معتمدين على مراجع ودراسات حديثة ومستفيدين من تمثيلات هذه الجبور .

٢) إدخال مفهوم العنصر المميز h_0 في جبر لي نصف البسيط G منته البعد (على حقل F مميزه معدوم) وإثبات أنَّ تحليل جبر لي نصف البسيط إلى فضاءات وزن جبر كارتان H مطابق لتحليل جبر لي نصف البسيط إلى الفضاءات الذاتية للمؤثر ad_{h_0} .

٣) إنشاء خوارزمية لاختبار جبور لي البسيطة .

٤) برمجة الخوارزمية السابقة لاختبار جبور لي الخطية البسيطة على حقل عددي عن طريق برنامج Mathematica 5.0 حيث تمَّ تنفيذ هذه الخوارزمية مباشرة على جبر لي الخطي نصف البسيط $SL(3,\mathbb{C})$.

لقد فتحت جبور لي الباب واسعاً أمام تطبيقات عديدة رياضية وفيزيائية (زمــر لــي ، ميكانيــك هاميلتون ، حل المعادلات التفاضلية العادية) لذلك انكب العلماء اليوم على دراستها . ومن أبــرز المواضيع التي تدرس حالياً في جبور لي نصف البسيطة " الأزواج معدومة القــوى ، المثاليــات الأولية ، الجبر المغلف ".

References

[1] A.L.Onishchik and V.V.Gorbatsevich . *Lie groups and Lie algebras I* , volume ٢٠ of Encyclopaedia of mathematical sciences . Springer-Verlag , Berlin Held-olbora ,١٩٩٣.

[2] Andreas Cap . *Lie algebras and representation theory* , Spring term . Wien university , ٢٠٠٣.

[3] B.C Hall . Lie Groups , *Lie algebras and representations*, volume ٢٢٢ of Graduate texts in mathematics . Springer – Verlag , New York , ٢٠٠٣ .

[4] C. Schneider." A computer-based approach to the classification of nilpotent Lie algebras". *Experimental mathematics, Vol.* ١٤*, No.* ٢ , ٢٠٠٥.

H.Samelon . *Notes on Lie algebras*, ٣rd edition. Springer – Verlag , New York, ١٩٩٠.

[6] I.M.Yaglpm. *Felix Klein and Sophus Lie* . Birkhauscr , Boston , ١٩٩٨.

[7] J.E.Humphreys . *Introduction to Lie algebras and representation theory,* volume ٩ of Graduate texts in mathematics. Springer –Verlag , New York , ١٩٧٢.

[8] J.P.Serre . *Complex semi simple Lie algebras*, Springer monographs in mathematics . Springer – Verlag , Berlin Heidelberg , ٢٠٠١.

[9] J.Schwartz . "Fast probabilistic algorithms for verification of polynomial identity". *ACM , vol* . ٢٧: ٧٠١-٧١٧ , ١٩٨٠.

[10] E. Koudsi . *Algebras Theory* . Damascus university , ٢٠٠٥

[11] K.Eradman. and M.J.Wildon. *Introduction to Lie algebras*, Undergraduate mathematics series . Springer –Verlag, London , ٢٠٠٦.

[12] N.Bourbaki . *Lie groups and Lie algebras part I : chapters* ١-٣. Hermann ,Paris ,١٩٧٥

[13] N.Jacobson. *Lie Algebras* , volume ١٠ of Intersience tracts in pure and applied mathematics . Joun Wiley , London, ١٩٦٢.

[14] P.Tauvel and R.W.T.Yu . *Lie algebras and algebraic groups* . Springer monographs in mathematics . Springer – Verlag , Berlin Heidelberg ,٢٠٠٥.

[15] R.Cahn. *Semi simple Lie algebras and their representations* . Benjamin, Caliornia ,١٩٨٤.

[16] R.W.Carter. *Lie algebras of finite and affine type* . Cambridge university press , Cambridge , ٢٠٠٥.

[17] T.S.Blyth and E.F.Robertson . *Further linear algebra* , ٢nd edition , undergraaduate mathematics series . Springer – Verlag , London , ٢٠٠٦.

[18] V.S.Varadarajan . Lie groups , *Lie algebras and their representations ,* ٢nd edition , volume ١٠٢ of Graduate texts in mathematics . Springer –Verlag ,New York , ١٩٨٤ .

[19] W. A. de Graaf. "Classification of solvable Lie algebras". *Experimental mathematics, vol.* ١٤, *No.* ١،٢٠٠٥.

W.Fulton and J.Harris . *Representation theory* , A first course , volume ١٢٩ of Graduate texts in mathematics .Springer – Verlag , New York ,١٩٩١.

[21] W. H. Greub . *Linear algebra,* ٣rd edition. Springer-Verlag , Berlin Heidelberg , ١٩٦٧.

[22] Z.Wan . *Lie algebras* , volume ١٠٤ of International series of monographs in pure and applied mathematics . Pergamon press , ١٩٧٥.